DIE

MEDICINISCHE PHYSIK.

VON

ADOLF FICK,
Professor der Physiologie in Zürich.

MIT 153 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITE
GÄNZLICH UMGEARBEITETE AUFLAGE.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1866.

Ka

Anhang.

Ueber Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf medicinische Statistik.

Bekanntlich sucht man viele Probleme der medicinischen Wissenschaft durch statistische Zusammenstellungen zu lösen. Diese Methode hat ohne Zweifel in der Medicin wie in anderen Wissenschaften ihre volle Berechtigung, wofern sie nur in der richtigen Weise angewandt wird. Die Regeln dieser Anwendung können aber durchaus nur der „Wahrscheinlichkeitsrechnung" entlehnt werden, welche nach Laplace's treffenden Worten „nichts anderes ist als der auf scharfen Ausdruck gebrachte gesunde Menschenverstand". Im Folgenden sollen die wichtigsten Resultate dieser mathematischen Disciplin, welche auf medicinische Statistik Anwendung erleiden, mitgetheilt werden. Wir müssen jedoch einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken, um womöglich gewisse Vorurtheile zu zerstreuen, die leider noch immer in Betreff der Anwendung statistischer Methoden unter den Aerzten zu herrschen scheinen. Schon von verschiedenen Seiten*) sind den medicinischen Forschern die mathematischen Hülfsmittel fertig zugerichtet dargeboten worden, so dass es sich nur noch um eine rein mechanische Benutzung handelt. Noch immer aber haben dieselben keinen umfassenden Gebrauch davon gemacht. Ja es haben sich sogar öfters gewichtige Stimmen principiell dagegen erhoben. So wendet beispielsweise ein Arzt**) von wohlbegründetem Rufe gegen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Probleme der organischen Natur ein: „Wir können genau berechnen, wie gross die Leistungsfähig-„keit einer Dampfmaschine unter gegebenen Verhältnissen ist, und wie „weit sich dieselbe ändert, sobald diese Verhältnisse geändert werden.

*) Gavarret, principe géneraux de statistique médicale, Paris 1840. Radicke, die Bedeutung und der Werth arithmetischer Mittel etc. Arch. f. physiol. Heilk. Neue Folge, Bd. II, S. 145.

**) Benecke, Arch. f. physiol. Heilk. Neue Folge, Bd. II, S. 552.

„Wir gewinnen damit untrügliche Zahlen und die weitere Verwerthung „derselben bietet keine Schwierigkeiten dar. Der thierische Organismus „aber, und am wenigsten der menschliche, ist keine solche Maschine. All„täglich und stündlich wirken Einflüsse auf ihn ein, die den Fluss der „Lebenserscheinungen in mehr weniger bedeutendem Grade alteriren kön„nen, und welcher Art die Untersuchungen auch sind, die man am mensch„lichen Organismus anstellt, es wird bei der Resultirung immer mehr dar„auf ankommen, diese Einflüsse richtig abzuwägen, mit einem Worte, das „Experiment physiologisch zu prüfen, als auf die gewonnenen Zahlen den „Scharfsinn eines Mathematikers verwenden.“ Die citirte Aeusserung ist zwar nur eine einzelne, aber sie dürfte doch wohl annähernd den Sinn aller Derer ausdrücken, die der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Medicin abgeneigt sind, und es dürfte daher erlaubt sein, an diese Aeusserung unsere allgemeinen Bemerkungen zunächst anzuknüpfen. Es ist offenbar ein einfaches Missverständniss, wenn in dem fraglichen Zusammenhange die Anwendbarkeit des Calculs auf organische Vorgänge bestritten, auf die Vorgänge in einer Dampfmaschine dagegen statuirt wird — handelt es sich ja doch um den Wahrscheinlichkeitscalcul. Das Anwendungsgebiet dieses Calculs sind aber eben diejenigen Erscheinungen, auf welche uns ganz unbekannte oder wenigstens unberechenbare Ursachen einwirken, also jedesfalls eher die Erscheinungen am Menschen als an der Dampfmaschine, und es ist auch wohl noch keinem vernünftigen Ingenieur in den Sinn gekommen, den fraglichen Calcul auf seine Maschinen anzuwenden. Nach dem Vordersatz meint man nun, die Vorgänge am menschlichen Körper sollten dem (Wahrscheinlichkeits-) Calcul für unzugänglich erklärt werden, weil man zu wenig davon wisse, aber im Nachsatze wird dann die Behauptung gebracht, man könne des Wahrscheinlichkeitscalculs entbehren, weil man genug davon wisse. Ich kann wenigstens die Worte, dass es bei Ziehung von Schlüssen darauf ankomme „die Einflüsse richtig abzuwägen“ nicht anders verstehen. Das wäre auch ganz wahr, wennn wir die Einflüsse nur richtig abwägen könnten, dann brauchten wir allerdings keine Wahrscheinlichkeitsrechnung und keine Statistik mehr. Das Abwägen der einzelnen Umstände wäre eben „Gewissheitsrechnung“. Soweit sind wir aber mit dem Menschen nicht, wir können die Einflüsse, die hier wirken, nicht abwägen, ja es handelt sich in den hier in Betracht kommenden Fällen gerade darum, zu ermitteln, ob irgend ein Agens ein Einfluss ist oder nicht, und dazu soll Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen. Man hat auch in der That von ihren Principien zu diesem Zwecke seit Menschengedenken Gebrauch gemacht, und es thun es tagtäglich diejenigen die sich in principiellen Aeusserungen dagegen sträuben. Hat man sich doch in der Therapie von jeher, wenige Fälle abgerechnet, auf die Erfolge berufen. Wer wüsste z. B. den Einfluss des Chinins auf einen Wechselfieberkranken richtig „abzuwägen“, dass ein solcher und zwar ein günstiger statthat schliesst man aus den Erfolgen. Das heisst aber gar nichts Anderes als die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Anwendung bringen. Es kann sich überhaupt kein Mensch in der Welt der täglichen Anwendung dieser Principien in Leben und Wissenschaft erwehren, sie wurzeln zu fest im gesunden Menschenverstand. Es ist daher schwer begreiflich, dass sich die Aerzte so hartnäckig gegen die Anwendbarkeit der besonderen Folgerungen aus den anerkanntesten Principien sträuben. Dies heisst nichts Anderes als behaupten, dass die ersten Köpfe der beiden verflossenen Jahrhunderte, ein Pascal, Fermat, Bernouilli, Laplace, Gauss, entweder falsch geschlossen oder gelogen haben. Diese Mathematiker sagen Alle mit den klarsten Worten, dass die von ihnen entwickelten Resultate der Wahrscheinlichkeitsrechnung streng logische Consequenzen aus den allgemein zugestandenen Grundsätzen des gesunden Menschenverstandes sind, und dass sie auf allen Gebieten Anwendung finden, wo es sich um Erscheinungen handelt, auf die zahllose unbekannte und unberechenbare Ursachen einwirken.

Der Streit gegen die Nothwendigkeit, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch numerisch auf die medicinische Statistik anzuwenden, gleicht dem Streite Don Quixotes gegen die Windmühlen, denn wenn die Gegner ihre eigenen Begriffe scharf zergliederten, so würden sie ihren Streit aufgeben und würden überdies finden, dass der numerische Wahrscheinlichkeitscalcul oft ihre eigenen wissenschaftlichen Behauptungen besser stützen würde als sie dieselbe selbst gestützt glauben. Ein concretes Beispiel wird diese Behauptung am besten rechtfertigen. Gavarret hat in seinem oben citirten Werkchen aus Gründen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Fug und Recht die Schlüsse angefochten, welche Louis aus einer Reihe von Beobachtungen über die Wirkung des Aderlasses und des tartarus emeticus gezogen hatte. In einer an Phrasen überhaupt und für Gavarret anerkennenden Phrasen insbesondere sehr reichen Kritik*) läugnet nun Valleix factisch vollkommen die von ihm nicht verstandenen Principien, welche Gavarret vertritt, und nimmt Louis's Schlüsse in Schutz. Es wird dabei viel davon geredet, dass in Louis's Statistik nicht bloss die Zahlen eine Rolle spielten, sondern die genaue Beobachtung. Hierin liegt natürlich schon ein Missverständniss, denn die genaue Beobachtung hat bei der statistischen Methode immer nur den Zweck, festzustellen, was gezählt werden soll, das Beweisende bleibt rein das numerische Verhältniss. Den Todesstoss glaubt aber Valleix der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu versetzen, indem er Louis's Beweis für die Wirksamkeit des Brechweinsteins in der Pneumonie vorführt, der wie er meint jedem einleuchten müsse, obwohl er den von Gavarret vertretenen Principien zuwider laufe. „Der Brechweinstein," beginnt Valleix, „wurde 20 Kranken gegeben und davon starben bloss drei. Ein sehr günstiges Resultat, doch streng genommen von geringem Werthe. Denn, wie Gavarret gezeigt hat, kann, wo es sich um so kleine Zahlen handelt,

*) Archives générales de médicine, 3me serie, Bd. VIII, S. 1.

der Irrthum so gross sein, dass man keinen bindenden Schluss ziehen kann. Bleiben wir jedoch dabei nicht stehen. Betrachten wir, unter welchen Umständen sich die Kranken befanden, denen der Brechweinstein in grossen Dosen gegeben wurde. Wir finden zunächst, dass dies geschah nach mehreren fruchtlosen Aderlässen, während die Krankheit sich stetig verschlimmerte. Diese Thatsache giebt dem in Rede stehenden Resultate schon einen grösseren Werth, denn man sieht mehr Erfolg da, wo man weniger hätte erwarten sollen.“ Diese Betrachtung kann man in folgende Worte übersetzen: Louis hat mit Brechweinstein nicht einfach 20 Pneumonieen, sondern 20 (nach seinem Urtheil) sehr schwere Pneumonieen behandelt, und bloss drei davon starben. Wenn irgend ein verständiger Mensch hieraus einen Schluss auf die Wirksamkeit des Brechweinsteins machen will, so muss er sich zuvor eine numerische Vorstellung von jener Schwere der betreffenden Pneumonieen machen. Irgend welche derartige Vorstellung hat jedesfalls auch Valleix vorgeschwebt. Nehmen wir an, er wäre stillschweigend von der Voraussetzung ausgegangen, unter Pneumonieen von der Qualität, welche Louis mit Brechweinstein behandelte, verliefen durchschnittlich 50 Procent tödtlich, wofern kein Brechweinstein gegeben wird. Wenn aber diese Voraussetzung richtig ist, dann verwirft die Wahrscheinlichkeitsrechnung keineswegs, wie Valleix meint, den Louis'schen Schluss trotz der kleinen Anzahl der Fälle. Die numerische Rechnung zeigt im Gegentheil, dass unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 Fällen nicht mehr als drei tödtlich verlaufen, so gering ist, dass man wohl berechtigt ist zu der Vermuthung, es sei eine constante Ursache (der Brechweinstein) im Spiel, nicht der blosse Zufall. Ja, ich glaube, Valleix selbst würde keine so hohe Wette darauf wagen, dass beim Roulett in 20 Spielen nicht mehr als dreimal schwarz fällt, als ihm die Wahrscheinlichkeitsrechnung vernünftigerweise zu wagen gestattet. Man sieht also, dass Valleix's Argument den Vertreter der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchaus nicht in der Weise in Verlegenheit setzt, dass er einen Schluss zugeben müsste, der seinen Regeln zuwider gemacht wäre. Wenn er den Schluss überhaupt verwerfen will (was hier nicht zu erörtern ist), so verwirft er ihn nicht, weil er falsch gezogen ist, sondern weil er die freilich nur stillschweigend eingeschmuggelte Voraussetzung nicht zugiebt. Mit blosser „Betrachtung der Umstände“ kann sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung eben nicht begnügen. Im vorliegenden Falle hätte eine zweite Statistik, von möglichst ähnlich schweren Pneumonieen ohne Brechweinstein behandelt, der ersten an die Seite gestellt werden müssen, aus welcher irgend eine angenäherte Zahl für die durchschnittliche Sterblichkeit bei der betreffenden Krankheitsintensität entnommen werden konnte; denn wer bürgt dafür, dass nicht ein sehr gefährliches Ansehen darbietenden Fällen doch nur eine durchschnittliche Sterblichkeit von 15 Procent zukommt. Solche numerische Grundlagen verlangt aber nicht nur die Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern es verlangt sie auch der gesunde Menschenverstand, wenn er auch nicht gerade auf dem Papiere mit geschriebenen Zahlen rechnet und wie gesagt hat Valleix selbst bei den oben citirten Betrachtungen irgend eine quantitative Beziehung vorgeschwebt, vielleicht nicht gerade die beispielsweise angenommene bestimmte Voraussetzung einer durchschnittlichen Sterblichlichkeit von 50 Procent, so doch etwas wie: die durchschnittliche Sterblichkeit ohne Brechweinstein würde nicht kleiner als 40 Procent sein oder irgend etwas derart. Die Gefahr des blossen Schätzens ohne eigentlich numerische Rechnungen mit geschriebenen Zahlen besteht nun gerade darin, dass man dabei zu geneigt ist, sich halb unbewusst unrichtige oder wenigstens gänzlich unbewiesene quantitative Voraussetzungen vorschweben zu lassen, vor denen man vielleicht zurückschrecken würde, sähe man sie schwarz auf weiss vor sich.

Es wird hoffentlich nunmehr klar sein, dass die Beurtheilung des Werthes einer statistischen Zusammenstellung lediglich und ausschliesslich Sache des allgemeinen gesunden Menschenverstandes, d. h. der Mathematik und zwar der Wahrscheinlichkeitsrechnung insbesondere ist, und dass dabei die Kenntniss vom Gegenstande, um den es sich handelt, gar nicht in Betracht kommt. Diese Kenntniss ist nöthig, um die Zusammenstellung zu machen, d. h. um anzugeben, welche Fälle gezählt werden sollen und welche nicht. Der einfache gesunde Menschenverstand d. h. die Mathematik giebt aber an, welche Tragweite und welchen Grad von Sicherheit die aus der Zusammenstellung gezogenen Schlüsse haben. Der gesunde Menschenverstand kann nicht wissen, ob dieser oder jener Mensch eine Pneumonie überhaupt oder eine doppelseitige Pneumonie hat. Liegt ihm aber eine mit Sachkenntniss zusammengestellte Statistik über n Pneumonieen vor, worunter m tödtlich verliefen, so kann er berechnen, zwischen welchen Grenzen die durchschnittliche Sterblichkeit bei Pneumonie überhaupt wahrscheinlich liegt, oder aus einer Statistik über doppelseitige Pneumonie insbesondere kann er berechnen, zwischen welchen Grenzen sie bei dieser besonderen Form der Pneumonie wahrscheinlich liegt.

Eines darf man natürlich bei der Statistik vor Allem nicht vergessen, dass es die Wahrscheinlichkeitsrechnung eben mit Wahrscheinlichkeit zu thun hat, nie mit Gewissheit. Daher kann es sehr wohl vorkommen, dass der Fachmann auf irgend eine der Statistik fremde Erwägung gestützt, Etwas annimmt, das nach den Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausserordentlich unwahrscheinlich ist. Darin liegt natürlich kein Widerspruch, denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt nie zu dem Resultate, dass etwas unmöglich ist. So z. B. werde ich trotzdem, dass vor meinen Augen 20mal hintereinander mit einem Würfel Vier geworfen ist, doch annehmen, dass auch andere Zahlen auf den Seiten des Würfels stehen, wenn ich denselben vorher besehen habe. Ich wäre damit auch nicht im Widerspruch mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die eben nur sagt, es sei ganz ausserordentlich unwahrscheinlich, dass mit einem gewöhnlichen Würfel 20mal nacheinander 4 geworfen wird, keineswegs aber, es sei unmöglich. Für solche Fälle ist dann freilich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung überflüssig, aber es bleiben leider noch Fälle genug übrig, in denen man durch anderweitige Erwägungen zu keiner Gewissheit kommen kann, und diese sind es gerade, wo uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung eben einen mehr oder weniger hohen Grad von Wahrscheinscheinlichkeit bietet, den sie uns auch numerisch bestimmen lehrt.

Die Möglichkeit, in irgend einem Gebiete des menschlichen Wissens Statistik als Hülfsmittel der Forschung zu verwenden, beruht auf einem Satze, der zu den bemerkenswerthesten und allgemeinsten Wahrheiten gehört, die bis jetzt vom menschlichen Geiste mit Sicherheit erkannt sind. Es ist dies das sogenannte Gesetz der grossen Zahlen und kann folgendermaassen ausgesprochen werden: Wenn ein Ereigniss A an sich eine gewisse Wahrscheinlichkeit hat, und man beobachtet eine Anzahl von Fällen, in welchen das Ereigniss A entweder eintreten muss oder nicht, so wächst mit wachsender Anzahl der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der Anzahl der Fälle, in welchen das Ereigniss A stattgefunden hat, zur Gesammtzahl der Beobachtungen der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A an sich sehr nahe kommt, und es lässt sich andererseits behaupten, es ist ein gewisser beliebig anzunehmender Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass das Verhältniss der Fälle, in welchen das Ereigniss A eingetreten ist, zur Gesammtzahl der Beobachtungen der Wahrscheinlichkeit von A an sich um so näher kommt, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist. Dieser für die Entwickelung aller Wissenschaft unendlich folgenschwere Satz ist nicht etwa bloss eine plausibele Annahme, sondern er ist streng mathematisch erweisbar, und dass er nach dem Urtheile der erleuchtetsten Geister auch eines Beweises bedarf, lässt sich daraus entnehmen, dass J. Bernouilli nach seiner eigenen Aussage 20 jähriges Nachdenken zur Auffindung des Beweises aufgewandt hat. Jetzt ist der Beweis freilich in 5 Minuten zu durchschauen und ist in jedem Elementarlehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu finden *).

Wenn in der That der soeben ausgesprochene Satz die Grundlage für alle statistische Forschung ist, so kann dieselbe offenbar nur da Anwendung finden, wo bei dem einzelnen Ereignisse von einer Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinne des Wortes die Rede sein kann, d. h. da, wo das Eintreten oder Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses von unberechenbaren Umständen, von sogenannten Zufälligkeiten abhängt, wie schon in den einleitenden Bemerkungen angedeutet wurde. Alle Gegenstände statistischer Forschung lassen sich daher auf ein Schema reduciren, das auch in den Abhandlungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung beständig benutzt wird: man kann sich nämlich unter dem Eintreten des Er-

---

*) Man sehe z. B. Lacroix traité élémentaire du Calcul des probabilités 4me edit. Paris 1864. Das Studium dieses vortrefflichen Werkchens dürfte überhaupt allen denen zu empfehlen sein, welche sich eine vollständigere Einsicht in diese wichtigen Lehren verschaffen wollen.

eignisses A immer denken das Erscheinen einer schwarzen Kugel bei einem blinden Griffe in eine Urne, welche schwarze und weisse Kugeln enthält, unter dem Nichteintreten des Ereignisses A wäre dann das Erscheinen einer weissen Kugel zu verstehen. Dies Schema, dessen wir uns auch ferner bedienen werden, ist nicht bloss ein einzelnes Beispiel, es ist vielmehr ein Repräsentant aller möglichen Gegenstände statistischer Behandlung. Ein Gebiet, das nicht durch dies Schema repräsentirt werden kann, ist überall nicht der statistischen Behandlung fähig. Dass das Schema auf die Erscheinungen passt, welche Gegenstand der medicinischen Statistik sein sollen, ist offenbar, und wird sich im Verlaufe unserer Betrachtungen noch deutlicher herausstellen.

Wir wollen nun zunächst das oben ausgesprochene Grundgesetz noch etwas näher erläutern. Stellen wir uns vor, eine Urne enthielte 2 schwarze und 3 weisse Kugeln und es würde vielemale hintereinander eine Kugel blind herausgezogen. Natürlich wird die gezogene Kugel sofort wieder hineingelegt, so dass das Verhältniss der schwarzen und weissen ungeändert bleibt. Die abstracte Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist hier bekanntlich für jeden einzelnen Griff $^2/_5$. Nehmen wir jetzt zwei Verhältnisse, die von $^2/_5$ wenig verschieden sind, z. B. $^5/_{10}$ und $^3/_{10}$, zwischen denen $^2/_5$ ($= {}^4/_{10}$) mitten inne liegt, dann sagt der Bernouilli'sche Satz: Je öfter wir das Ziehen einer Kugel wiederholen, desto grösser wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der Anzahl der Fälle, wo eine schwarze Kugel erschienen ist, zur Gesammtzahl der Fälle zwischen den Grenzen $^5/_{10}$ und $^3/_{10}$ enthalten ist. Schon bei zehn Zügen würde die Wahrscheinlichkeit, nicht mehr als 5mal und nicht weniger als 3mal eine schwarze Kugel zu ziehen, merklich grösser als $^1/_2$ sein. Bei tausend Versuchen aber würde die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel nicht mehr als 500mal und nicht weniger als 300mal erschiene, kaum noch von 1 verschieden sein, d. h. es würde fast gewiss sein, dass das Verhältniss der Fälle, wo eine schwarze Kugel erscheint, zu der Gesammtzahl der Fälle von der abstracten Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, um weniger als $^1/_{10}$ abweicht. Die volle Gewissheit ist aber in der Wirklichkeit nie zu erlangen, was seinen symbolischen Ausdruck durch die mathematische Zeichensprache darin findet, dass die Wahrscheinlichkeit erst dann genau gleich 1 wird, wenn die Anzahl der Fälle unendlich gross ist.

Wenden wir die zweite Ausdrucksweise des Bernouilli'schen Satzes auf unser Beispiel an. Wir setzen einen bestimmten Wahrscheinlichkeitsgrad, z. B. $\frac{200}{201}$, fest. Nun sagt der Bernouilli'sche Satz: Diese Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, dass das Verhältniss der gezogenen schwarzen Kugeln zur Anzahl aller Züge um so weniger von $^2/_5$ abweicht, je grösser diese Anzahl aller Züge ist. So könnten wir z. B. vernünftigerweise 200 gegen 1 wetten, dass bei 100 Zügen nicht mehr als etwa 54 und nicht weniger als etwa 26 schwarze Kugeln herauskommen, d. h. dass jenes Verhältniss nicht mehr als um etwa 0,14 von $^2/_5$ verschieden ist. Bei tausend Zügen könnten wir aber schon 200 gegen 1 darauf wetten, dass nicht mehr als etwa 445 und nicht weniger als etwa 355 schwarze Kugeln erscheinen, d. h. dass das fragliche Verhältniss um weniger als 0,045 von $^2/_5$ verschieden ist. Bei einer unendlichen Anzahl von Zügen würde man 200 gegen 1 (oder auch jeden andern Satz) wetten können, dass das Verhältniss der Anzahl der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln sich gar nicht von $^2/_5$ unterscheidet.

Das Wesen aller Statistik besteht nun in der umgekehrten Anwendung des in Rede stehenden Satzes. In der That, wenn das Verhältniss der gezogenen schwarzen Kugeln zur Anzahl aller gezogenen Kugeln bei einer genügenden Anzahl von Zügen dem Verhältniss der in der Urne enthaltenen schwarzen Kugeln zu der Anzahl aller darin enthaltenen Kugeln sehr wahrscheinlich nahe kommt, so kann man aus jenem beobachteten Verhältniss einen Schluss machen auf dies letztere Verhältniss, wofern es unbekannt ist. Ganz allgemein gesprochen, kann man aus einer Reihe von Beobachtungen, wo ein Ereigniss A entweder eintreten oder nicht eintreten musste, auf die abstracte Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses einen Schluss machen. Aber man muss wohl bedenken, dass der Schluss eben nur ein Wahrscheinlichkeitsschluss, kein sicherer ist.

Das gewöhnliche Ziel einer statistischen Untersuchung ist, zu untersuchen, ob ein gegebener Umstand bei einer gewissen Erscheinung die Rolle eines mitwirkenden Einflusses spielt, mit anderen Worten, ob die abstracte Wahrscheinlichkeit der fraglichen Erscheinung bei Anwesenheit dieses Umstandes eine andere ist, als bei Abwesenheit desselben. Diese Frage soll entschieden werden durch Beobachtung der Erscheinung einerseits bei Anwesenheit, andererseits bei Abwesenheit des betreffenden Umstandes. Es wird nach den vorhergehenden Erörterungen nunmehr ein Leichtes sein, zu zeigen, in welcher Art der numerische Wahrscheinlichkeitscalcül bei Erreichung eines derartigen Zieles Anwendung erleidet. Bringen wir wiederum die allgemeine Frage auf das Schema der Ziehung von Kugeln aus einer Urne. Jetzt haben wir natürlich anzunehmen, dass wir nicht wissen, in welchem Verhältniss die Urne schwarze und weisse Kugeln enthält. Es sei aus einer Urne U eine Anzahl r_1 von Kugeln gezogen (natürlich ist nach jedem Zuge die gezogene Kugel wieder hineingelegt und geschüttelt) und darunter seien m_1 schwarze, dann ist schon nach dem Vorhergehenden klar, dass, wofern r_1 eine sehr grosse Zahl, z. B. grösser als 1000 ist, das Verhältniss $\frac{m_1}{r_1}$ sehr wahrscheinlich dem Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne sehr nahe kommt, indessen wird es ihm sehr wahrscheinlich nicht ganz genau gleich sein. Es sei zweitens aus einer anderen Urne V eine Anzahl r_2 von Kugeln gezogen, darunter m_2 schwarze. Man will nun wissen, ob die Urne V schwarze und weisse Kugeln im selben oder in anderm Verhältniss enthält, als die Urne U. Es versteht sich ganz von selbst, dass man dies auf dem in Rede stehenden statistischen Wege niemals absolut sicher erfahren kann — um es sicher zu erfahren, müsste man in die Urne hineinsehen können —, aber man wird doch unter Umständen behaupten können, dass sehr wahrscheinlich die schwarzen und weissen Kugeln in V in anderem Verhältnisse als in U enthalten sind. Wann diese Behauptung und mit welchem Grade von Wahrscheinlichkeit sie aufgestellt werden darf, lässt sich aber keineswegs nach blossem Gutdünken entscheiden, dazu ist durchaus ein numerisch ausgeführter Wahrscheinlichkeitscalcül nöthig. Seien beispielsweise aus jeder Urne 50 Kugeln gezogen worden, aus U 15 schwarze und 35 weisse, aus V 25 schwarze und 25 weisse. Es wäre sehr gewagt, hieraus zu schliessen, dass die Urne V verhältnissmässig mehr schwarze Kugeln enthält als U. Denn es hat offenbar gar nichts Unwahrscheinliches, aus einer Urne, welche zu zwei Fünftheilen schwarze Kugeln enthält, einmal bei 50 Zügen 15, ein andermal bei 50 Zügen 25 schwarze Kugeln zu ziehen. Der vorausgesetzte Thatbestand würde sich also ganz gut mit der Annahme vertragen, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in beiden Urnen dem Verhältniss $^2/_5$ genau oder nahezu gleich wäre.

Hätte man dagegen in jede der beiden Urnen U und V 5000 mal gegriffen, und aus U 1500, aus V 2500 schwarze Kugeln erhalten, dann würde man offenbar berechtigt sein, anzunehmen, dass sehr wahrscheinlich in der Urne U wirklich verhältnissmässig weniger schwarze Kugeln sind, als in V. Wenn auch in manchen Fällen ein Schluss, wie der in Rede stehende, oder die Unmöglichkeit eines solchen auf der Hand liegt, so kann doch nur der eigentliche Wahrscheinlichkeitscalcül lehren, wie im Allgemeinen die Zahlen beschaffen sein müssen, um durch sie einen Schluss der fraglichen Art zu begründen. Die Regeln darüber sind höchst einfach, obwohl nur die verwickeltsten mathematischen Speculationen dazu führen konnten, und es sollen im Folgenden diese Regeln aufgestellt und erläutert werden. Zuvor jedoch wollen wir noch näher betrachten, in welcher Weise in der That das Schema von zwei Urnen, die schwarze und weisse Kugeln enthalten, alle Probleme der medicinischen Statistik genau repräsentirt.

Es sei beispielsweise unsere Aufgabe, zu ermitteln, ob auf den Verlauf der Lungentuberkulose die Lebensweise der wohlhabenden Gesellschaftsclasse einen vortheilhaften Einfluss übe oder nicht. Diese Aufgabe lässt sich offenbar auf das Schema der zwei Urnen mit schwarzen und weissen Kugeln zurückführen, und ist mithin der statistischen Behandlung fähig. In der That besteht offenbar für einen der unbemittelten Volksclasse Angehörigen, mit Tuberkulose Behafteten, eine gewisse Wahrscheinlichkeit, der Krankheit zu erliegen, d. h. man weiss ebenso wenig zum Voraus, ob er ihr erliegen wird oder nicht, wie man zum Voraus weiss, ob man beim einzelnen Zuge aus einer Urne weiss, ob man eine schwarze oder weisse Kugel ziehen wird, aber es muss ein bestimmtes, freilich nicht a priori erkennbares Zahlenverhältniss geben, welches an-giebt, wie viel mehr Grund wir haben, zu erwarten, der Kranke werde erliegen, als genesen. Der unbemittelte Tuberkulose steht also gleichsam vor einer Urne U mit schwarzen und weissen Kugeln im bestimmten Verhältnisse, aus der er einen Zug thun muss, der ihm entweder eine schwarze Kugel — Erliegen — oder eine weisse — Genesung — bringt. Die Analogie besteht einzig darin, aber dies genügt, dass der Eintritt des Erliegens oder Genesens ebenso von unberechenbaren Umständen (Zufälligkeiten) abhängt, wie das Erscheinen einer weissen oder schwarzen Kugel, und dass der ganze Complex von theils günstigen, theils ungünstigen Umständen für alle Individuen der betrachteten Classe derselbe ist, das drückt sich im Schema dadurch aus, dass die sämmtlichen Individuen aus derselben Urne eine Kugel ziehen. In derselben Weise ist man berechtigt, alle Tuberculosen aus der bemittelten Volksclasse zu denken als vor einer anderen Urne V stehend, aus welcher jeder einen Zug zu thun hat, der entscheidet, ob er genest oder erliegt. Wenn man nun eine grosse Anzahl von Zügen aus der Urne U beobachtet, d. h. an einer grossen Anzahl von unbemittelten Tuberkulosen Erliegen resp. Genesen beobachtet, so kann man mit grosser Wahrscheinlichkeit ermitteln, wie gross ungefähr das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne U ist, mit anderen Worten, wie gross ungefähr die Wahrscheinlichkeit, zu Erliegen, für jeden einzelnen unbemittelten Tuberkulosen ist, — man kann Grenzen angeben, zwischen denen ihr Werth sehr wahrscheinlich enthalten ist. Ebenso kann man aus einer Anzahl von Beobachtungen an bemittelten Tuberkulosen schliessen, wie gross wahrscheinlich für einen Tuberkulosen der letzteren Classe die Wahrscheinlichkeit zu erliegen ungefähr ist — man kann auch für den Werth dieser Wahrscheinlichkeit Grenzen angeben, welche dieselbe sehr wahrscheinlich nicht überschreitet. Die Vergleichung zwischen den beiden Ergebnissen kann nun offenbar möglicherweise zu dem Schlusse berechtigen, dass sehr wahrscheinlich in der Urne U verhältnissmässig mehr schwarze Kugeln sind, als in der Urne V, d. h. dass für einen unbemittelten Tuberkulosen die Wahrscheinlichkeit, der Krankheit zu erliegen, grösser ist, als für einen Bemittelten. Dieser Schluss käme darauf hinaus, dass die Lebensweise der bemittelten Stände einen günstigen Einfluss auf den Verlauf der Tuberkulose übte, oder die der unbemittelten Volksclasse einen ungünstigen. Es kann sich natürlich auch umgekehrt das Resultat ergeben, dass wir durch unsere Statistik nicht zu dem Schlusse berechtigt sind, in der Urne U seien wahrscheinlich verhältnissmässig mehr schwarze Kugeln als in V. Dann können wir durch die Statistik die Behauptung eben nicht stützen, dass die Lebensweise der unbemittelten Volksclasse zu den ungünstigen Umständen für die Tuberkulosen gehöre.

Angenommen, es hätte sich bei der gedachten statistischen Untersuchung herausgestellt, wir wären zu dem besprochenen Schlusse berechtigt, dann könnten wir weiter versuchen, durch Statistik zu ermitteln, welche unter den Lebensverhältnissen der unbemittelten Volksclasse vorwiegend jenen schädlichen Einfluss ausüben, wir könnten z. B. fragen, ob es vorwiegend etwa angestrengte körperliche Arbeit ist? Wir brauchten zu diesem Ende nur die unbemittelten Tuberkulosen selbst wieder in zwei Classen zu bringen, deren eine zu angestrengter körperlicher Arbeit gezwungen ist, während die andere dies nicht ist.

Hoffentlich wird aus diesem einen Beispiel ersichtlich geworden sein, wie sich alle Probleme der medicinischen Statistik im engeren Sinne des Wortes reduciren lassen auf das Schema: Es wird gefragt, wie gross ist wahrscheinlich das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in einer Urne, aus welcher man eine gewisse Anzahl von Zügen beobachtet hat? und wir können nunmehr zur Erörterung der Rechnungsregeln übergehen.

Dem Bernouilli'schen Satze gleichsam als Umkehrung entsprechend lässt sich folgender Satz aufstellen: Wenn bei r Beobachtungen im Ganzen das Ereigniss A $m$mal eingetreten (und mithin $(r-m)$mal nicht eingetreten) ist, so ist ein bestimmter, beliebig zu wählender Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass die abstracte Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A nicht mehr vom Verhältnisse $\frac{m}{r}$ differirt als um einen aus den Zahlen m und r berechenbaren Bruch. Wenn also aus einer Urne $r$mal nacheinander eine Kugel gezogen (und wieder hineingelegt) ist, und wenn $m$mal die gezogene Kugel eine schwarze war, so ist ein gewisser willkürlich anzunehmender Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne von dem Verhältniss $\frac{m}{r}$ nicht mehr abweicht, als um einen aus m und r berechenbaren Bruch. Es mag hier ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass in dem Calcül über den Werth statistischer Ermittelungen stets ein rein willkürliches Element enthalten ist, nämlich der Grad von Wahrscheinlichkeit, mit welchem man sich begnügen will, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen die zu berechnenden Grenzen fällt. Dies liegt aber in der Natur der Sache, denn der gesunde Menschenverstand sagt uns schon ohne Rechnung und die vorhergehenden Betrachtungen haben wiederholt darauf hingewiesen, dass durch Statistik niemals unbedingte Gewissheit, sondern immer nur Wahrscheinlichkeit zu erlangen ist, und es bleibt daher nothwendig dem Ermessen des einzelnen Forschers überlassen, bei welchem Grade der Sicherheit er sich befriedigt erklärt. Um so mehr ist aber die wirkliche Ausführung der Rechnung geboten, weil nur dadurch zu erkennen ist, welcher Grad von Sicherheit erreicht ist.

Es ist also nun vor allen Dingen eine Verabredung darüber zu treffen, welchen Grad von Wahrscheinlichkeit man verlangen will. Man muss darin natürlich ein gewisses Maass halten. Da uns die Wahrscheinlichkeit hier doch mehr oder weniger die Gewissheit ersetzen soll, so darf man sich mit keiner zu geringen Wahrscheinlichkeit begnügen, und es wäre z. B. geradezu unsinnig, bloss die Wahrscheinlichkeit $1/2$ zu verlangen.

Andererseits dürfen wir aber doch auch wieder nicht zu weit gehen, weil sonst das Resultat dadurch unbrauchbar wird, dass man Grenzen findet, die zu weit auseinander liegen. Poisson hat in seinem berühmten Werke über die Wahrscheinlichkeit der richterlichen Urtheile in einigen beispielsweise durchgeführten numerischen Rechnungen die Wahrscheinlichkeit $0.995 \left(\text{etwa} = \frac{212}{213}\right)$ als Ersatz für die Sicherheit gelten lassen, und dies Maass ist von Gavarret in der oben citirten Schrift angenommen. Die Wahl gerade dieser Zahl hat durchaus nicht etwa innere Gründe. Sie beruht bloss darauf, dass dadurch die Rechnung an Einfachheit gewinnt, und dass es zugleich eine der Einheit (dem Symbol der Gewissheit) nahe liegende Zahl ist. Wenn wir uns mit diesem Maasse von Sicherheit begnügen wollen, dann berechnet sich der Bruch, um welchen die Wahrscheinlichkeit des m mal in r Fällen beobachteten Ereignisses A von $\frac{r}{m}$ höchstens abweichen kann zu $\sqrt{\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}}$. Mit anderen Worten, man kann vernünftigerweise 212 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A an sich nicht grösser ist als $\frac{r}{m} + \sqrt{\frac{8\,m(r-m)}{r^3}}$ und nicht kleiner als $\frac{r}{m} - \sqrt{\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}}$. Um den Satz endlich noch einmal in den Ausdrücken des allgemeinen schematischen Beispiels zu geben: Wenn wir aus einer Urne in r Zügen m schwarze Kugeln gezogen haben, so dürfen wir vernünftigerweise 212 gegen 1 wetten, dass das Verhältniss der schwarzen Kugeln zu allen Kugeln in der Urne nicht grösser ist als $\frac{r}{m} + \sqrt{\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}}$ und nicht kleiner als $\frac{r}{m} - \sqrt{\frac{8\,m(r-m)}{r^3}}$. Der Werth dieser Formel ist in jedem einzelnen Falle in weniger als 5 Minuten (mit Hülfe der Logarithmentafel) ausgerechnet, was hernach durch Beispiele deutlich gemacht werden soll. Es muss übrigens hier bemerkt werden, dass unsere Formel eine Näherungsformel ist, die nur anwendbar ist, wenn r eine ziemlich grosse Zahl ist. Sowie z. B. r kleiner als 100 ist, so verliert die Formel ihre Gültigkeit, und man kann nicht mehr 212 gegen 1 wetten, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen den aus der Formel zu berechnenden Grenzen eingeschlossen ist. In einem solchen Falle müsste man die Grenzen auf einem andern directen aber höchst mühseligen Wege berechnen. Man würde übrigens damit doch kaum zu einem brauchbaren Ergebniss kommen, weil man allemal finden würde, dass die Grenzen sehr weit auseinander liegen. Uebrigens ist diese Einschränkung weiter kein Schade, denn Statistik machen mit weniger als mindestens einigen hundert Fällen, heisst die Principien, worauf die statistische Forschung beruht, missverstehen. Wer mit weniger als 100 Fällen Statistik zu machen glaubt, der macht in Wahrheit nicht Statistik, sondern der verlässt sich auf jenes trügerische Abwägen der einzelnen Fälle, das den subjectiven Vorurtheilen Thür und Thor öffnet, die man so gern mit den schönen Namen: Sachkenntniss, individueller Takt u. s. w. nennt.

Nehmen wir jetzt wieder an, das Ereigniss A sei unter gewissen Umständen in r Fällen m mal eingetreten und wir könnten daher den obigen Schluss in Beziehung auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A unter den gedachten Umständen machen. Hierauf sei mit Hinzufügung eines neuen constanten Umstandes a abermals eine lange Reihe von r_1 Beobachtungen angestellt und das Ereigniss A wäre in m_1 Fällen eingetreten, dann könnten wir nach den obigen Sätzen schliessen: es ist 212 gegen 1 zu wetten, dass unter Hinzufügung des neuen Umstandes die Wahrscheinlichkeit von A zwischen den Grenzen $\frac{r_1}{m_1} + \sqrt{\frac{8\, m_1 (r_1 - m_1)}{r_1^3}}$ und $\frac{r_1}{m_1} - \sqrt{\frac{8\, m_1 (r_1 - m_1)}{r_1^3}}$ enthalten ist. Liegt nun die obere Grenze, welche diese letztere Rechnung ergiebt, unterhalb der unteren Grenze, welche die erstere Rechnung (die r Fälle betreffend) liefert, oder liegt die untere Grenze der zweiten Rechnung oberhalb der oberen Grenze der ersten Rechnung, so kann man noch weit mehr als 212 gegen 1 wetten, dass durch Einführung des neuen Umstandes a in den Complex der Bedingungen die abstracte Wahrscheinlichkeit von A verändert worden ist, d. h. mit anderen Worten, es ist so gut wie gewiss, dass der Umstand a Einfluss hat auf das Ereigniss A und zwar, dass er einen ungünstigen Einfluss auf dies Ereigniss hat, wenn die erstere, einen günstigen Einfluss, wenn die letztere Bedingung erfüllt ist.

Man kann sich nun aber noch immer mit dem Sicherheitsgrade $\frac{212}{213}$ begnügen wollen dafür, dass der hinzugefügte Umstand a von Einfluss ist. Dann brauchen die Verhältnisse $\frac{m}{r}$ und $\frac{m_1}{r_1}$ nicht soweit von einander zu differiren, wie es die soeben angedeutete Rechnung verlangen würde, aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung giebt eine Formel, wie weit sie von einander differiren müssen. So wie nämlich die Differenz $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1}$ $\left(\text{resp. wofern } \frac{m_1}{r_1} > \frac{m}{r} \text{ ist, die Differenz } \frac{m_1}{r_1} - \frac{m}{r}\right)$ gleich oder grösser ist als $\sqrt{\frac{8\, m\, (r - m)}{r^3} - \frac{8\, m_1 (r_1 - m_1)}{r_3}}$, so darf man mindestens 212 gegen 1 wetten, dass in der zweiten Reihe von r_1 Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A eine andere gewesen ist als in der ersten Reihe, dass mithin der Complex von Ursachen bei der zweiten Reihe ein anderer gewesen als bei der ersten, oder da nur der Umstand a hinzugefügt wurde, dass gerade dieser Umstand zu den wirksamen Ursachen zu rechnen ist.

Findet sich die Differenz $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1}$ $\left(\text{resp. } \frac{m_1}{r_1} - \frac{m}{r}\right)$ kleiner als die soeben gegebene Wurzelgrösse, so heisst dies zunächst nur: man ist nicht berechtigt, auf die Wirksamkeit des Umstandes a 212 gegen 1 zu wetten. Keineswegs darf man aus diesem Befunde etwa allemal schliessen, dass der Umstand a höchst wahrscheinlich unwirksam sei. Wie die Zahlen r, m, r_1, m_1 beschaffen sein müssten, um diesen Schluss zu rechtfertigen, liesse sich zwar gleichfalls durch Formeln ausdrücken, doch wollen wir diese hier nicht weiter verfolgen, da sie am Ende doch praktisch nicht von grossem Interesse sein dürften. In der That wird ein vorsichtiger Forscher, wenn sich aus einer Statistik nicht mindestens mit der Sicherheit $\frac{212}{213}$ die Wirksamkeit eines Umstandes folgern lässt, eine bestimmte Behauptung vorläufig nicht aufstellen, sondern sich nur zu ferneren Untersuchungen aufgefordert finden.

Wir wollen nun das Vorstehende durch ein fingirtes Beispiel erläutern. Das Ereigniss A sei der Tod durch eine bestimmte Krankheit K, der Begriff dieser Krankheit kann so eng oder so weit gefasst werden als er will, nur muss die Anzahl der beobachteten Fälle um so grösser genommen werden, je weiter der Begriff von K gefasst wird. Wollte man z. B. unter K den exanthematischen Typhus verstehen, so dürfte man sich vernünftigerweise auf eine kleinere Anzahl von Fällen beschränken (indessen immer noch einige hundert) als wenn man unter K Typhus überhaupt verstehen wollte. Nehmen wir an, wir hätten 900 Fälle der Krankheit K beobachtet und davon wären 180 gestorben, 720 genesen. Wir hätten also $r = 900$, $m = 180$, $r - m = 720$. Aus diesen Zahlen ist vor Allem die Grösse $\sqrt{\frac{8\,m\,(r - m)}{r^3}}$ zu berechnen, was nach folgendem Schema geschieht:

$$
\begin{aligned}
& \qquad\qquad\qquad log.\ 8 = 0{,}903 \\
log.\ m &= log.\ 180 = 2{,}255 \\
log.\ (r - m) &= log.\ 720 = 2{,}857 \\
\text{daher } log.\ [8 \cdot m\ (r - m)] &= 6{,}015 \\
log.\ (r^3) = log.\ (900)^3 &= 3\ log.\ 900 = 8{,}862 \\
\text{folglich } log.\ \left[\frac{8 \cdot m\ (r - m)}{r^3}\right] &= 0{,}153 \\
&- 3 = 1{,}153 - 4
\end{aligned}
$$

Die Hälfte davon ist $log. \sqrt{\frac{8\,m\,(r - m)}{r^3}} = 0{,}576 - 2$. Suchen wir zu diesem Logarithmus in der Tafel den numerus, so finden wir $0{,}0377 = \sqrt{\frac{8 \,.\, m\ (r - m)}{r^3}}$. Man kann also 212 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit an der Krankheit K zu sterben enthalten ist zwischen den Grenzen $\frac{180}{900} + 0{,}0377$ und $\frac{180}{900} - 0{,}0377$ oder vollständig decimal ausgedrückt zwischen den Grenzen 0,2377 und 0,1623, das Resultat unserer Statistik wäre mit anderen Worten, dass an der Krankheit K höchst wahrscheinlich im Durchschnitt nicht weniger als 16 und nicht mehr als 24 Procent der Befallenen sterben. Man beachte, dass trotz der ansehnlichen Anzahl von Fällen diese Grenzen doch noch ziemlich weit auseinander liegen.

Wir wollen jetzt zweitens annehmen, wir hätten 700 ($= r_1$) neue Fälle derselben Krankheit mit einem gewissen Mittel behandelt, welches in jenen 900 Fällen nicht angewandt wurde, alle übrigen Umstände wären sich aber gleich geblieben, und namentlich wäre auch bei dieser zweiten Beobachtungsreihe der Begriff der Krankheit K wieder in demselben Umfange gefasst, die Kranken wären aus denselben Bevölkerungsclassen zufällig gegriffen etc. Es seien nun von den 700 Kranken 12 Procent, d. h. 84 ($= m_1$) gestorben und 616 ($= r_1 - m_1$) genesen. Es fragt sich, ob wir einen Schluss auf Wirksamkeit des in Rede stehenden Mittels ziehen können. Wir haben also jetzt zu berechnen die Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3} + \frac{8\,m_1\,(r_1-m)}{r_1^3}}$, indem wir darin setzen $r = 900$ $m = 180$, $r_1 = 700$, $m_1 = 84$. Diese Rechnung kann nach folgendem Schema leicht gemacht werden:

$$\begin{aligned}
log.\ 8 &= 0{,}903\\
log.\ m = log.\ 180 &= 2{,}255\\
log.\ (r-m) = log.\ 720 &= \underline{2{,}857}\\
log.\ [8\,m\,.(r-m)] &= 6{,}015\\
log.\ r^3 = log.\ 900^3 = 3\ log.\ (900) &= \underline{8{,}862}\\
\text{daher } log.\ \frac{8\,m\,(r-m)}{r^3} &= 0{,}153 - 3
\end{aligned}$$

hierzu der numerus

$$0{,}00142 = \frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}.$$

$$\begin{aligned}
log.\ 8 &= 0{,}903\\
log.\ m_1 = log.\ 84 &= 1{,}924\\
log.\ (r_1 - m_1) = log.\ 616 &= \underline{2{,}790}\\
log.\ 8\,m_1\,(r_1-m_1) &= 5{,}617\\
log.\ r_1^3 = 3\ log.\ 700 &= \underline{8{,}535}\\
\text{daher } log. \frac{8\,m_1\,(r_1-m_1)}{r} &= 0{,}082 - 3,
\end{aligned}$$

hierzu der numerus

$$0{,}00121 = \frac{8\,m_1\,(r_1-m_1)}{r_1^3}$$

Mithin haben wir $\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3} + \frac{8\,m_1\,(r_1-m_1)}{r_1^3} = 0{,}00263.$

Hieraus ist die Wurzel zu ziehen, man sucht daher in der Tafel $log.\ 0{,}00263 = 0{,}420 - 3 = 1{,}420 - 4$. Davon die Hälfte =

$0,710 - 2$ ist $\log. \sqrt{0,00263}$. Diese Wurzel ist also die Zahl, deren Logarithmus $0,710 - 2$ ist, d. h. die Zahl 0,0513. Der Werth der fraglichen Wurzelgrösse ist also in unserm Falle $= 0,0513$. Da wir nun hatten $\frac{m}{r} = 0,20$ und $\frac{m_1}{r_1} = 0,12$, folglich $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1} = 0,08$, so ist diese Differenz grösser als die berechnete Wurzelgrösse $(0,08 > 0,0513)$ und wir können also mehr als 212 gegen 1 wetten, dass das Arzneimittel einen Einfluss auf die Krankheit hat und zwar einen günstigen, da es die durchschnittliche Sterblichkeit vermindert hat.

Wir wollen nun eine andere Annahme discutiren. Es seien von den 700 mit dem Medicamente behandelten Kranken 105 (d. h. 15 Proc.) gestorben und 595 genesen. Dies wäre immer noch anscheinend ein sehr schlagendes Resultat gegenüber der ersten Beobachtungsreihe, wo 20 Procent gestorben waren. Berechnen wir aber unter der neuen Annahme die charakteristische Wurzelgrösse, so finden wir dieselbe $= 0,0536$. Der Unterschied $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1} = 0,05$ ist also kleiner als dieselbe. Wenn wir uns daher mit keiner geringeren Sicherheit als $\frac{212}{213}$ begnügen wollen, so hat diese Statistik keine Beweiskraft für die Wirksamkeit des angewandten Mittels. Wir können nicht 212 gegen 1 wetten (wie unter der erstgemachten Annahme), dass unser Medicament wirksam ist. Eine gewisse nicht unbeträchtliche Wahrscheinlichkeit dafür wäre offenbar auch jetzt noch vorhanden, da $\frac{m}{r} - \frac{m_1}{r_1}$ dem Werthe der berechneten Wurzelgrösse doch ziemlich nahe kommt, aber es wäre doch gewagt, einen Satz in der Wissenschaft als streng erwiesen gelten zu lassen, für welchen nicht mindestens eine Wahrscheinlichkeit $\frac{212}{213}$ vorhanden ist. In der nachstehenden kleinen Tabelle sind einige Werthe des Ausdruckes $\sqrt{\frac{8\,m\,(r-m)}{r^3}}$ für verschiedene Werthe von r und m verzeichnet. Jedoch ist in einem Eingange der Tabelle statt der Grösse m die aus m und r zu berechnende Grösse $\frac{m}{r}$ angegeben, wodurch begreiflicherweise Zahlen gespart werden.

	$r = 300$	$= 400$	$= 500$	$= 600$	$= 700$	$= 800$	$= 900$	$= 1000$
$\frac{m}{r} = 0{,}10$	0,0490	0,0424	0,0379	0,0346	0,0321	0,0300	0,0283	0,0270
$= 0{,}15$	0,0583	0,0505	0,0452	0,0412	0,0382	0,0357	0,0337	0,0319
$= 0{,}20$	0,0653	0,0566	0,0506	0,0462	0,0428	0,0400	0,0377	0,0358
$= 0{,}25$	0,0707	0,0612	0,0548	0,0506	0,0463	0,0433	0,0408	0,0387
$= 0{,}30$	0,0748	0,0648	0,0580	0,0529	0,0490	0,0458	0,0432	0,0410
$= 0{,}35$	0,0779	0,0674	0,0603	0,0551	0,0510	0,0477	0,0450	0,0427
$= 0{,}40$	0,0800	0,0693	0,0620	0,0566	0,0524	0,0490	0,0462	0,0438
$= 0{,}45$	0,0813	0,0703	0,0629	0,0575	0,0532	0,0498	0,0469	0,0445
$= 0{,}50$	0,0817	0,0707	0,0632	0,0578	0,0535	0,0500	0,0471	0,0447

Aus dieser Tabelle kann man die Grenzen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses höchst wahrscheinlich eingeschlossen ist, direct entnehmen, wofern die betreffenden Werthe von r und $\frac{m}{r}$ in den Eingängen der Tabelle verzeichnet sind. Man habe beispielsweise eine Statistik, von 600 Fällen in 150 Fällen sei das Ereigniss A eingetreten, und in 450 Fällen nicht, dann hat man $r = 600$, $m = 150$ und $\frac{m}{r} = \frac{150}{600} = 0{,}25$. Nun sucht man in der Tabelle die Zahl, welche in der 600 überschriebenen Längsspalte und in der 0,25 bezeichneten Querspalte enthalten ist — sie ist 0,0506. Nach der Bedeutung dieser Zahl kann man also zufolge unserer Statistik 212 gegen 1 wetten, dass die abstracte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A zwischen den Grenzen $0{,}25 + 0{,}0506$ und 0,0506 oder zwischen den Grenzen 0,2706 und 0,1994 liegt.

Die Tabelle kann übrigens auch benutzt werden, wenn das Ereigniss A öfter als in der Hälfte aller Fälle eingetreten ist, d. h. wenn $\frac{m}{r}$ grösser als 0,5 ist, obgleich grössere Werthe von $\frac{m}{r}$ nicht im Eingange der Tabelle verzeichnet sind. Man braucht alsdann nur m zu betrachten als die Anzahl der Fälle, in welchen das Ereigniss A nicht eingetreten ist, und die Tabelle ergiebt die Grenzen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens des Ereignisses A höchst wahrscheinlich enthalten ist. Sei z. B. das Ereigniss A in 425 von 500 Fällen eingetreten und in 75 Fällen nicht. Wir setzen jetzt $75 = m$ und haben mithin $\frac{m}{r} = 0{,}15$. Die Tabelle ergiebt dazu und zu $r = 500$, die Zahl 0,0452. Das bedeutet: wir dürfen 212 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit des **Nicht**eintretens des Ereignisses A enthalten ist zwischen den Grenzen $0,15 + 0,0452$ und $0,15 - 0,0452$, d. h. zwischen den Grenzen 0,1952 und 0,1048. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A ist also mit demselben Grade von Sicherheit zu suchen zwischen den Grenzen $1 - 0,1952$ und $1 - 0,1048$ d. h. zwischen den Grenzen 0,8048 und 0,8952.

Die Tabelle giebt auch für solche Fälle wenigstens annähernd eine Anschauung von dem Werthe einer Statistik, wo weder die betreffende Zahl r noch $\frac{m}{r}$ genau in den Eingängen zu finden ist.

Eine bemerkenswerthe Folgerung mag noch ausdrücklich hier hervorgehoben werden, welche durch den oberflächlichsten Blick auf die Tabelle ersichtlich wird. Man kann nämlich sagen, dass eine statistische Zusammenstellung einer **bestimmten** Anzahl von Fällen gewissermaassen um so grösseres Gewicht hat, je mehr das Verhältniss der Fälle, wo das Ereigniss A eingetreten ist, zu allen beobachteten Fällen von $^1/_2$ abweicht. In der That, man sieht in jeder Längsspalte unserer Tabelle die Zahlen von oben nach unten wachsen, d. h. je mehr sich das Verhältniss der positiven Fälle zu allen Fällen der Zahl 0,5 nähert, um so weiter rücken die Grenzen, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses wahrscheinlich eingeschlossen ist, auseinander, um so weniger Bestimmtheit hat folglich die aus der Statistik zu ziehende Folgerung. Wenn also das beobachtete Verhältniss der positiven Fälle zu allen Fällen $\left(\frac{m}{r}\right)$ von $^1/_2$ sehr verschieden ist, so wird man schon aus einer kleineren Statistik ein ebenso bestimmtes Resultat ableiten können, wie aus einer viel umfangreicheren, in welcher das Verhältniss der positiven Fälle zu allen Fällen nahezu $^1/_2$ ist.